Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato I

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tutori: A. Mazzoccoli, M. Nanni

SOLUZIONI

Esercizio 1. N.B. = Le soluzioni sono pensate per un primo approccio semplice che non utilizza ancora le definizioni di limite e successione, strumenti che però possono tranquillamente essere usati in un eventuale esonero.

a) $\left\{n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ Si osservi che $n - \frac{1}{n} \geqslant 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, per cui il Min è 0. Sui naturali la quantità $1/n$ diminuisce sempre di più fino ad essere praticamente zero, ma allo stesso tempo n assumerà valori sempre più grandi in $\mathbb{N}^*$. Ovviamente l'insieme dei naturali non è superiormente limitato, dunque questo insieme non ammette Sup.

b) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ Come in a), la quantità $1/n$ è sempre più piccola in modulo, è quindi opportuno ricercare il valore di n tale che essa dia il contributo massimo e allo stesso tempo la quantità $(-1)^n$ risulti positiva. Il valore cercato è $n = 2$ per il quale abbiamo un Max in 3/2. Per n_ε grandi avremo oscillazioni in due intervalli di raggio ε piccolo a piacere $(-1, -1 + \varepsilon)$ e $(1, 1 + \varepsilon)$. Dunque l'insieme ammette un Inf in -1.

c) $\left\{n^2 + 3n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ Notiamo che $n^2 + 3n - 1 \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant 1$. L'unica scelta ragionevole risulta dunque $n = 0$ per cui avremo un Min in -1. Poiché $n^2 + 3n$ assumerà valori sempre più grandi in $\mathbb{N}$, che non è superiormente limitato, non avremo un Sup per questo insieme.

d) $\left\{\frac{3n - Isen(n)|}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ Riscriviamo gli elementi dell'insieme come $3 - sen(n)/n$. Poiché $|sen(n)| \leqslant 1 \quad \forall n$ il comportamento di $|sen(n)|/n$ sarà identico a quello di $1/n$, cioè assumerà valori sempre più piccoli all'aumentare di n. Da questo si evince che l'insieme ammette un Sup, che vale 3. Osserviamo adesso che $3 - |sen(n)|/n \geqslant 3 - 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Il membro destro della diseguaglianza ammette un Min = 2. Il valore del nostro insieme che più ci si avvicina è quello assunto per $n = 1$, cioè 3 - sen(1), che è proprio il Min cercato.

e) $\left\{x^2 \leqslant 2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ Basta risolvere $x^2 \leqslant 2$ per trovare tutti gli elementi dell'insieme, che è semplicemente l'intervallo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Il Max e il Min sono rispettivamente $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

f) $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi, dunque non è limitato né superiormente né inferiormente. Stesso discorso vale per $3\mathbb{Z}$, insieme degli interi multipli di 3, che ha la stessa cardinalità di $\mathbb{Z}$ e non è limitato. Per quanto riguarda $(-\infty, 5]$, esso ammette Max in 5, mentre $(-2, +\infty)$ ammette Inf in -2.

g) $\left\{2n + \frac{3}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$ Per quanto visto negli esercizi precedenti, $2n$ assumerà valori sempre più grandi al crescere di n, dunque fissando $n = 1$ avrò il più piccolo valore possibile del primo addendo, cioè 2. Facendo ora crescere m, avremo che la quantità $3/m$ darà contributo sempre minore fino ad essere quasi zero. L'insieme quindi ammette Inf in 2. Non è superiormente limitato, poiché si ripropone la situazione vista in a).

h) $\left\{x^2 - y^2 \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$ Fissando x e lasciando crescere y in modulo, avremo quantità sempre più piccole, in $\mathbb{R}$, che non è inferiormente limitato. Analogamente se fissiamo y e lasciamo crescere x in modulo, avremo quantità sempre più grandi in $\mathbb{R}$, che non è superiormente limitato. L'insieme dunque non ammette né Sup né Inf.

i) $\Big\{xy \mid x \in [-1,2] \ \wedge \ y \in [-3,-1)\Big\}$ Qui basta scegliere il valore massimo e minimo che assume la quantità xy al variare di x e y negli intervalli considerati. Si vede quindi facilmente che abbiamo un Min in -6 e un Max in 3.

Esercizio 2.

- $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

-Base induttiva per $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ e $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$ OK.

-Passo induttivo assumendo l'eguaglianza vera per $n-1$ e provandola per n:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 =_{passo} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} =$$

$$\frac{2n(n+1)(n+1/2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- $n! > 2^n \quad \forall\, n \geqslant 4$

-Base induttiva per $n = 4$: $4! = 24$ e $2^4 = 16 \quad 24 > 16$. OK.

-Passo induttivo assumendo la diseguaglianza vera per n e provandola per $n+1$:

$$(n+1)! = n!(n+1) >_{passo} 2^n(n+1) > 2^n 2 = 2^{n+1}$$

- $n^n > n! \quad \forall\, n \geqslant 2$

-Base induttiva per $n = 2$: $2^2 = 4$ e $2! = 2 \quad 4 > 2$ OK.

-Passo induttivo assumendo la diseguaglianza vera per n e provandola per $n+1$:

$$(n+1)^{n+1} = (n+1)^n(n+1) > n^n(n+1) >_{passo} n!(n+1) = (n+1)!$$

Esercizio 3. Per ampia induzione su n: (i.e. considerata una proprietà vera per n essa vale anche $\forall k \in \{0,1,...,n-1\}$)

- Base induttiva per $n = 2$, 2 è primo. OK.

-Passo induttivo assumendo la proprietà vera per n e provandola per $n+1$:

Se $n+1$ è primo, ho finito. Se $n+1$ non è primo, allora $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$ t.c. $k_1|(n+1)$
Adesso posso scrivere $n+1 = k_1k_2$ con $k_2 \in \mathbb{Z}$. Ma $k_1, k_2 < n$ dunque, per ampia induzione, si possono entrambi fattorizzare come prodotto di numeri primi: $k_1 = p_1p_2...p_m$ e $k_2 = s_1s_2...s_t$. Da questo segue la dimostrazione della proprietà: $n+1 = p_1p_2...p_ms_1s_2...s_t$.

Esercizio 4. Usando la formula del binomio di Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ si ottengono i seguenti risultati:

-$n = 4$: $81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4$

-$n = 5$: $243x^5 - 810x^4y + 1080x^3y^2 - 720x^2y^3 + 240xy^4 - 32y^5$

-$n = 6$: $729x^6 - 2916x^5y + 4860x^4y^2 - 4320x^3y^3 + 2160x^2y^4 - 576xy^5 + 64y^6$

Esercizio 5. Si pensi al significato del binomio di Newton come tutte le possibili scelte di 4 elementi diversi in un insieme formato da 20 elementi totali. Dunque:

$$\binom{20}{4} = \frac{20!}{4!16!} = 15 \cdot 17 \cdot 19 = 4845.$$

Esercizio 6. Ricordando la tecnica usata nella dimostrazione per $\sqrt{2}$, distinguiamo due casi:

- Se n è un quadrato perfetto, cioè $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $n = k^2$, allora $\sqrt{n}$ è un intero, non c'è nulla da dimostrare.

- Mettiamoci per semplicità nel caso $n = p$, con p primo. Supponiamo per assurdo che $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$ per cui $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$, coprimi tra loro. Sappiamo però che $MCD(a,b) = 1 \Rightarrow MCD(a^2,b^2) = 1$. Eleviamo ambo i membri al quadrato e portiamo a sinistra b^2, ottenendo $pb^2 = a^2$. Ma se così fosse $b^2|a^2$ e dunque $MCD(a^2,b^2) = b^2 \neq 1$. Giungiamo quindi ad un assurdo. La dimostrazione nel caso n è analoga decomponendo n come prodotto di primi p_i, cosa sempre possibile per quanto visto nel terzo esercizio.

Applicando quanto appena visto, dimostrare che $\sqrt{4n-1} \notin \mathbb{Q}$ equivale a dimostrare che $\nexists a \in \mathbb{Z}$ t.c. $a^2 = 4n - 1$. Anche per questa dimostrazione, distinguiamo due casi:

- Se a è pari, allora $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = 2k$. Ma $(2k)^2 = 4n - 1 \Leftrightarrow 4k^2 = 4n - 1$. L'equazione non può mai essere soddisfatta, in quanto un multiplo di 4 non può al tempo stesso avere resto non nullo nella divisione per 4.

- Se a è dispari, allora $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $a = 2k + 1$. Ma $(2k + 1)^2 = 4n - 1 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 4n - 1 \Leftrightarrow 1 = -2(k^2 + k - n)$. Ma 1 non è multiplo di 2, dunque anche in questo caso giungiamo ad un assurdo e proviamo quindi che $\sqrt{4n-1}$ è irrazionale.

Esercizio 7.

a) $2x + |x - 3| \geqslant 0$

Risolviamo:

$$\begin{cases} x - 3 \geqslant 0 \\ 2x + x - 3 \geqslant 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x - 3 < 0 \\ 2x - x + 3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Da cui otteniamo $x \geqslant -3$.

b) $\dfrac{x^2-2x+1}{|x+1|}<0$

Risolviamo:

$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ \\ \dfrac{x^2-2x+1}{x+1} > 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ \\ \dfrac{x^2-2x+1}{x+1} < 0 \end{cases}$$

Il sistema non ammette soluzioni.

c) $\left|\dfrac{5-x}{x+3}\right| \geqslant 1$

Risolviamo:

$$\begin{cases} \dfrac{5-x}{x+3} \geqslant 0 \\ \\ \dfrac{5-x}{x+3} - 1 \geqslant 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} \dfrac{5-x}{x+3} < 0 \\ \\ \dfrac{x-5}{x+3} - 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

Da cui otteniamo $x \leqslant 1$.

d) $|x^2+x-2| \leqslant 2|x-1|$

L'esercizio risulta più impegnativo, poiché dovremo studiare stavolta l'unione di quattro sistemi:

$$\begin{cases} x^2+x-2<0 \\ x-1 \geqslant 0 \\ x^2+x-2 \geqslant 2(1-x) \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x^2+x-2<0 \\ x-1 < 0 \\ x^2+x-2 \geqslant 2(x-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x-2 \geqslant 0 \\ x-1 \geqslant 0 \\ x^2+x-2 \leqslant 2(x-1) \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x^2+x-2 \geqslant 0 \\ x-1 < 0 \\ x^2+x-2 \leqslant 2(1-x) \end{cases}$$

La soluzione è $-4 \leqslant x \leqslant 1$.

<u>Esercizio 8.</u> Procediamo innanzitutto a dimostrare la prima uguaglianza.

-Base induttiva per $n=1$: $\quad (a-b)=(a-b)$. OK.

-Passo induttivo assumendo vera l'uguaglianza per n e dimostrandola per $n+1$:

$a^{n+1}-b^{n+1} = a^{n+1}-a^nb+a^nb-b^{n+1} = a^n(a-b)+b(a^n-b^n) =_{passo}$
$a^n(a-b)+b(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}) =$
$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+...+ab^{n-1}+b^n)$

A questo punto, ponendo $a=1$ e $b=q$ nella formula precedente, per $q \neq 1$ si ottiene:

$1+q+q^2+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ che si verifica (dando già per buona la base induttiva), con il seguente passo induttivo da n a $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} =_{passo} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

<u>Esercizio 9.</u>

a) $cos(n\pi) = (-1)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

Base induttiva per $n=1$: $cos(\pi) = -1$ e $(-1)^1 = -1$ OK.

Passo induttivo assumendo vera l'uguaglianza per n e provandola per $n+1$:

$$cos((n+1)\pi) = cos(n\pi+\pi) = cos(n\pi)cos(\pi) - sen(n\pi)sen(\pi) = -cos(n\pi) =_{passo} -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

b) $\prod_{k=1}^{n} 2(2k-1) = \dfrac{(2n)!}{n!}$

Base induttiva per $n=1$: $\prod_{k=1}^{1} 2(2k-1) = 2$ e $\dfrac{2!}{1!} = 2$ OK.

Passo induttivo assumendo vera l'uguaglianza per $n-1$ e provandola per n:

$$\prod_{k=1}^{n} 2(2k-1) = \prod_{k=1}^{n-1} 2(2k-1) \cdot 2(2n-1) =_{passo} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \cdot 2(2n-1) = \frac{2(2n-1)!}{(n-1)!} =$$

$$= (n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (2n-1)2n = \frac{(2n)!}{n!}$$

c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Base induttiva per $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ e $\dfrac{1(1+1)^2}{4} = 1$ OK.

Passo induttivo assumendo vera l'uguaglianza per $n-1$ e provandola per n:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + n^3 =_{passo} \frac{n^2(n-1)^2}{4} + n^3 = \frac{n^4-2n^3+n^2+4n^3}{4} = \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Si osservi infine che:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$